

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (2+2+2+2+4 Pkt.): Wir betrachten wieder die Matrizen von Blatt 5 Aufgabe 3. Welche der Matrizen ist invertierbar? Bestimmen Sie in den Fällen die Inverse:

(a) $\begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -3/7 & 5/7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 11 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$

(e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2 (5+10 Pkt.): Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A^k = \mathbf{0}$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass $I_n - A$ invertierbar ist mit $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$, indem Sie $(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \cdot (I_n - A) = I_n$ nachweisen.

(b) Zeigen Sie für $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, dass $A^3 = \mathbf{0}$ und berechnen Sie $(I_3 - A)^{-1}$, einmal mit Teil (a) und einmal nach dem Verfahren der Vorlesung indem Sie $(A|I_3)$ durch Zeilenoperationen so umformen, dass im vorderen Teil I_3 steht.

Aufgabe 3 (7 Pkt.): Sei

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Zeigen Sie: $\det(A_n) = n! \prod_{k=2}^n (-1)^{k-1}$ für $n \in \{1, 2, 3\}$.

Erinnerung: Für $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ ist $\prod_{k=m}^n a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$ und $\prod_{k=m}^n a_k = 1$, falls $m > n$.

Aufgabe 4 (Multiple Choice, jeweils 2 Pkt.): Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Dann ist A^{-1} auch eine obere Dreiecksmatrix.

(b) Für eine invertierbare Matrix A ist $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

(c) Für eine invertierbare Matrix A ist $(A^{-1})^{-1} = A$.

Abgabe: In den entsprechenden Zettelkasten gegenüber vom Raum 25.22.00.58 bis Mi., 03.06.2026, 10:00 Uhr.

Besprechung: In der Übung am Mi., 03.06.2026.